

## **Hoofd- versus cijferrekenen in Vlaanderen. Resultaten van een pilootstudie met de “choice/no-choice” methode**

Lieven Verschaffel<sup>1</sup> en Joke Torbeyns<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Centrum voor Instructiepsychologie en –Technologie, Katholieke Universiteit Leuven

<sup>2</sup> GROEP T – Leuven Education College

### 1. Inleiding

In Nederland is sinds enkele jaren een brede en hevige maatschappelijke discussie aan de gang over het soort van wiskundeonderwijs dat kinderen en jongeren nodig hebben.

Aan de ene kant is er het door het Freudenthal Instituut ontwikkelde en gepropageerde realistische onderwijsmodel, dat uitgaat van “wiskunde als menselijke activiteit”, (1) waarin veel aandacht wordt besteed aan het begeleid “her-uitvinden” van wiskundige begrippen en structuren op basis van al aanwezige intuïtieve inzichten en informele strategieën van leerlingen; (2) waarin veel belang wordt gehecht aan betekenisvolle contexten, zowel bij de vorming van de beoogde wiskundige begrippen en structuren als bij het leren toepassen ervan; (3) waarin het wiskundeleren wordt opgevat als het geleidelijk voortbewegen langs verscheidene niveaus van internalisering, abstractie, en formalisering; (4) waarin een centrale plaats wordt ingenomen door reflectie op het eigen handelen, gestimuleerd door interactie met de leerkracht en de medeleerlingen, en (5) waarin ten slotte zorgvuldig gelet wordt op de onderlinge afstemming van verschillende leerlijnen (Treffers, 1987). Deze visie op wiskundeonderwijs, die tot ontwikkeling en bloei is gekomen vanuit een kritiek op het toentertijd als (te) mechanistisch, empiristisch of structuralistisch ervaren wiskundeonderwijs (Treffers, 1987), heeft de voorbije veertig jaar een grote groep Nederlandse wiskundedidactici en -practici geïnspireerd, en heeft er - volgens de voorstanders van deze visie op wiskundeonderwijs - rechtstreeks toe bijgedragen dat het begrip van wiskunde, de vaardigheid in het toepassen ervan, en het vertrouwen en plezier in wiskunde is toegenomen bij leerlingen. Ook internationaal kan deze visie op ruime erkenning, waardering en navolging rekenen (zie bijv. Becker & Selter, 1996; De Corte, Greer, & Verschaffel, 1996; Verschaffel, Greer, & De Corte, 2007).

Daartegenover staat een groep van tegenstanders van het realistische onderwijsmodel - met als bekendste protagonisten Van de Craats (2007) in Nederland en Feys (2008) in Vlaanderen - die stellen dat Nederlandse kinderen – mede door toedoen van dat realistisch onderwijsmodel – minder goed kunnen rekenen dan voorheen, dat de parate kennis van rekenfeiten en de vlotte beheersing van standaardprocedures zijn verdwenen, dat de door de realisten gepropageerde instructieprincipes het rekenonderwijs onnodig chaotisch maakt en wiskundige structurering en abstractie in de weg staan, en dat er dus dringend nood is aan een aanzienlijke koerswijziging weg van dat “realistische rekenen”. Ook hun kritiek is overigens te kaderen binnen een ruimere internationale (tegen)beweging die het vernieuwingsgezinde (in het Engels: “reform-based”) gedachtegoed, waartoe we de realistische visie kunnen rekenen, op z'n zachtst gezegd niet genegen is.

De meningsverschillen over deze kwesties in de Nederlandse media waren anno 2010 zo heftig, liepen zo uiteen en zorgden voor zoveel verwarring onder beleidsmensen en practici, dat de gerenommeerde Koninklijke Nederlandse Akademie voor Wetenschappen (KNAW) het initiatief nam om helderheid in de discussie te proberen scheppen door de instelling van een commissie met als opdracht te komen tot (empirisch) gefundeerde uitspraken over de relatie tussen onderwijsmethode en rekenvaardigheid en tot daaruit voortvloeiende aanbevelingen over welke richting het Nederlandse wiskundeonderwijs best verder uitgaat.

Een moedig en belangrijk initiatief volgens de enen, een arrogante en ronduit gevaarlijke onderneming volgens anderen. Hoe dan ook, deze commissie is er gekomen, en zij heeft – onder leiding van Jan Karel Lenstra – een goed onderbouwd, evenwichtig en behulpzaam rapport uitgebracht (Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 2009), dat zowel bij de vertegenwoordigers van beide stromingen als bij de onzekere middengroep, met belangstelling en waardering is ontvangen (zie <http://www.knaw.nl/Pages/DEF/27/161.bGFuZz1OTA.html>). Als lid van deze commissie heeft de eerste auteur van deze bijdrage van dichtbij meegemaakt hoe de voorzitter van deze commissie, door middel van zijn rijke intellectuele en wetenschappelijke bagage, zijn strategisch inzicht, zijn uitstekende pen, en zijn grote sociale en persoonlijke vaardigheden, op een zeer kort tijdsbestek en met beperkte mankracht en middelen, deze delicate onderneming tot een goed einde wist te brengen.

De tweestrijd die tot de installering van deze commissie aanleiding gaf, spitste zich steeds meer toe op het strijdpunt van de (noodzaak van de)

beheersing van de standaardalgoritmen voor de vier basisbewerkingen. Met aan de ene kant de voorstanders van realistisch rekenonderwijs die het belang van de (perfecte) beheersing van die algoritmen, inz. van de staartdeling, relativeren, die pleiten voor meer aandacht voor alternatieve rekenwijzen gebaseerd op hoofd- en schattend rekenen, en voor een leerlijn waarbij het cijferrekenen actief, stapsgewijs en inzichtelijk wordt opgebouwd vanuit die andere rekenwijzen. En aan de andere kant de voorstanders van de terugkeer naar “het rekenen van opa”, waarin de beheersing van de standaardalgoritmen nog een koninklijke plaats innam in het curriculum, waarin de perfecte beheersing van die eindalgoritmen nog als een onbetwistbaar algemeen einddoel gold, en waarin het leertraject er naartoe gekenmerkt was door een sterk leraargestuurde, prestatiegerichte aanpak met weinig plaats voor inbreng van de leerlingen en weinig zorg om inzicht en flexibiliteit.

In deze korte bijdrage gaan wij ons niet ten gronde uitspreken over de moeilijke vakdidactische kwesties rond hoofd- versus cijferrekenen. Maar de aanbevelingen van de commissie indachtig dat er nood is aan bijkomend empirisch onderzoek (Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 2009, aanbeveling 4.1), rapporteren we de resultaten van een kleinschalige studie die wij recent rond dit thema hebben verricht. Hoewel de voornaamste bedoeling ervan was de bruikbaarheid van een bepaalde uit de experimentele psychologie afkomstige onderzoeksmethode – namelijk het “choice/no-choice” paradigma (Siegler & Lemaire, 1997) – voor dit thema te testen, leverde deze studie toch ook een aantal interessante, en enigszins verrassende, initiële bevindingen op, die relevant kunnen zijn voor de discussie rond de efficiëntie en waarde van cijferrekenen.

Met die belangrijke voorafgaande bedenking evenwel, dat de resultaten verzameld zijn in de Vlaamse context, waarvan algemeen bekend is dat daar – ook ten aanzien van het thema van de cijferalgoritmen - globaal genomen een “gematigde” rekendidactiek wordt gevolgd, in die zin dat daar de beheersing van de vier standaardalgoritmen voor alle leerlingen een communaal doel is (Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap, 1998), dat er in de meest gehanteerde methoden nog veel aandacht wordt besteed aan de verwerving ervan, en dat in de meeste methoden een aanpak wordt gehanteerd die afwijkt van de “progressieve schematisering” doch eerder als een strakke, inzichtelijke aanpak te typeren valt (Van Biervliet, 1994), zonder dat hoofdrekenen en schattend rekenen evenwel verwaarloosd worden.

## 2. Onderzoekskader

Zoals hoger toegelicht, kan deze studie gesitueerd worden binnen de context van de actuele en (soms) hevige discussies over de plaats en de waarde van de cijferalgoritmen in het huidige wiskundeonderwijs. Waar, volgens de tegenstanders van de vernieuwingsbeweging, de perfecte beheersing van de cijferalgoritmen nog steeds een belangrijk doel is van, en dus een centrale plaats moet krijgen binnen, het wiskundeonderwijs in de 21<sup>ste</sup> eeuw, vragen de aanhangers van het realistisch onderwijsmodel veeleer bijzondere aandacht voor alternatieve rekenstrategieën (hoofdrekenen, schattend rekenen) en een geleidelijke en stapsgewijze introductie van de cijferalgoritmen, voortbouwend op deze eerder verworven strategieën. Door eerst uitvoerig aandacht te besteden aan de verwerving van diverse en voor de leerlingen betekenisvolle (hoofd)rekenstrategieën, kunnen zij de noodzakelijke kennis, vaardigheden en attitudes opbouwen om deze strategieën ook later, na de introductie van de cijferalgoritmen, efficiënt en flexibel te blijven toepassen. Zo wordt verondersteld dat leerlingen sommen als  $534 + 299$  ook na de introductie van de cijferalgoritmen blijven oplossen met de compensatiestrategie via  $534 + (300-1) = 834-1 = 833$ , en niet met het (voor deze sommen complexe en met fouten behepte) standaardalgoritme, mits aan deze handige strategie gedurende de eerste jaren van het wiskundecurriculum voldoende aandacht is besteed. Als belangrijk argument voor deze centrale plaats van alternatieve rekenstrategieën verwijzen de vernieuwers naar de onmisbare rol die deze hoofd- en schattend rekenstrategieën spelen bij de geleidelijke, actieve en inzichtelijke opbouw van de cijferalgoritmen (Van den Heuvel-Panhuizen, Buys, & Treffers, 2000).

Het aantal empirische studies dat bouwstenen kan aanreiken tot het beantwoorden van de meest prominente vragen in deze erg moeilijke discussie is tot op heden echter beperkt (Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 2009). Het beschikbare (schaarse) onderzoek aansluitend bij dit thema bracht aan het licht dat basisschoolleerlingen - in beperkte dan wel in sterke mate geïnstrueerd op basis van het realistische gedachtegoed - op een weinig efficiënte en weinig flexibele manier gebruik maken van hoofdrekenen en cijferen bij het beantwoorden van elementaire rekentaken. Zo toonde Selters (2001) studie aan dat Duitse leerlingen van het derde en vierde leerjaar basisonderwijs (resp. groep 5 en groep 6) de traditionele cijferalgoritmen erg frequent, weinig efficiënt en allerm minst flexibel toepassen van zodra deze zijn geïntroduceerd in het onderwijs - en dat zij nog amper de eerder verworven (handige) hoofdrekenstrategieën hanteren, zelfs niet bij oefeningen als  $701 - 698$  en  $199 + 198$  die zich uitermate lenen tot het efficiënt en handig strategiegebruik. Daarnaast



bracht het onderzoek van Hickendorff, Heiser, Van Putten en Verhelst (2009) bij Nederlandse basisschoolleerlingen aan het licht dat deze leerlingen erg frequent gebruik maken van hoofdrekstrategieën bij meercijferige getalsopgaven - en (dus) weinig frequent van de traditionele cijferalgoritmen - maar dat deze verandering in strategiekeuze niet leidt tot betere prestaties. Integendeel, de hogere frequentie van hoofdrekstrategieën gaat gepaard met een sterke daling in de prestaties van de leerlingen bij deze opgaven. Deze tegenvallende onderzoeksresultaten worden door tegenstanders van de vernieuwingsbeweging aangehaald als argumenten voor een terugkeer naar het traditionele curriculum, met een centrale plaats van de cijferalgoritmen van bij de start van het wiskunde-onderwijs. Tegen de achtergrond van deze maatschappelijke en empirische context, beoogden wij in deze pilootstudie de strategiekenmerken van Vlaamse leerlingen bij het optellen en aftrekken met meercijferige getallen te analyseren, met bijzondere aandacht voor het gebruik van hoofdrekken en cijferen.

Daarbij maakten we gebruik van het “model of strategy change” (Lemaire & Siegler, 1995) en de “choice/no-choice” methode (Siegler & Lemaire, 1997) om de strategiekenmerken van de leerlingen te analyseren.

In het “model of strategy change” wordt onderscheid gemaakt tussen vier kenmerken van strategiegebruik, namelijk (1) strategierepertoire, of de verschillende strategieën die een leerling gebruikt bij het beantwoorden van een rekentaak; (2) frequentie van strategiegebruik, verwijzend naar de frequentie waarmee de leerling deze verschillende strategieën toepast; (3) efficiëntie van strategie-uitvoering, of de accuratesse en de snelheid waarmee de strategieën worden toegepast; en (4) de adaptiviteit of flexibiliteit van strategiekeuzen, gedefinieerd als het kiezen voor die strategie die het snelst leidt tot een accuraat antwoord op elke oefening.

De “choice/no-choice” methode komt in essentie neer op het aanbieden van oefeningen in twee soorten van condities, namelijk een keuzeconditie en één of meerdere geen-keuzecondities. In de keuzeconditie kunnen de leerlingen zelf kiezen welke strategieën ze gebruiken om elk van de aangeboden oefeningen te beantwoorden. In de geen-keuzecondities krijgen de leerlingen de opdracht om alle oefeningen op te lossen via één bepaalde, door de onderzoeker opgelegde strategie. Aangezien de leerlingen in de geen-keuzecondities alle oefeningen oplossen via één bepaalde strategie en (dus) geen selectief gebruik kunnen maken van hun voorkeursstrategie bij elke oefening, is het voor de onderzoeker mogelijk om in deze geen-keuzecondities voor elke strategie betrouwbare en valide

efficiëntiedata te verzamelen. Het vergelijken van de efficiëntiedata verzameld in de geen-keuzecondities met de strategiekeuzen van de leerlingen in de keuzeconditie, maakt het verder mogelijk om de adaptiviteit van deze strategiekeuzen in kaart te brengen: maken de leerlingen bij elke oefening daadwerkelijk gebruik van die strategie die hen het snelst leidt tot een accuraat antwoord (zoals kan worden afgeleid uit de efficiëntiedata van de geen-keuzecondities)?

### 3. Methode

#### 3.1 Deelnemers

Aan het onderzoek namen 21 leerlingen van het vierde leerjaar (groep 6) in Vlaanderen deel (13 jongens; gemiddelde leeftijd: 9 jaar 10 maanden). Alle leerlingen hadden vanaf het tweede leerjaar (groep 4) instructie ontvangen in hoofdrekenen bij het optellen en aftrekken met meercijferige getallen. Daarbij hadden de leerkrachten bijzondere aandacht besteed aan het rijgen als basisstrategie om optel- en aftrekepgaven in het getallengebied tot 1000 te beantwoorden (vb.  $614 + 199 = ?$ ;  $614 + 100 = 714$ ;  $714 + 90 = 804$ ;  $804 + 9 = 813$ ). Naast het rijgen, waren ook de splitsstrategie (vb.  $614 + 199 = ?$ ;  $600 + 100 = 700$ ;  $10 + 90 = 100$ ;  $4 + 9 = 13$ ;  $700 + 100 + 13 = 813$ ) en de compensatiestrategie (vb.  $614 + 199 = ?$ ;  $614 + 200 - 1 = 813$ ) aan bod gekomen. De instructie in de cijferalgoritmen voor optellen en aftrekken was gestart in het derde leerjaar (groep 5). Zoals in de meeste Vlaamse rekenmethoden het geval is, waren de cijferalgoritmen slechts beperkt opgebouwd vanuit de (hoofd)rekenstrategieën die de leerlingen al verworven hadden en hadden de leerkrachten deze algoritmen van bij de start van de instructie in cijferen in hun finale vorm aangereikt. Na intensieve oefening gedurende het hele schooljaar, werden de leerlingen verwacht deze algoritmen te beheersen aan het einde van het derde leerjaar. De eerste maanden van het vierde leerjaar (groep 6) hadden de leerkrachten aandacht besteed aan het verder oefenen en herhalen van het hoofdrekenen en de cijferalgoritmen bij het optellen en aftrekken in het getallendomein tot 1000.

#### 3.2 Materialen

Alle leerlingen kregen drie reeksen van telkens vier optel- en vier aftrekoefeningen in het getallendomein tot 1000 aangeboden. We maakten onderscheid tussen twee typen oefeningen (met in elke reeks telkens twee optel- en twee aftrekoefeningen per type). Het eerste type oefeningen, *hoofdreken- of HR-oefeningen*, zijn oefeningen die zich bij uitstek lenen tot het efficiënt gebruik van de compensatiestrategie (vb.  $498 + 263$ ;  $601 - 126$ ). We definieerden deze oefeningen op basis van twee kenmerken, namelijk

(1) één van beide termen kan eenvoudig worden afgerond tot het meest nabije honderdtal; de af te ronden term is slechts 1 of 2 eenheden groter of kleiner dan het meest nabije honderdtal; (2) de andere (dan de eenvoudig af te ronden) term is minstens 26 eenheden groter of kleiner dan het meest nabije honderdtal (d.i., TE waarde 26 tot en met 74). Het tweede type oefeningen, *cijfer- of C-oefeningen*, zijn oefeningen die niet uitnodigen tot het gebruik van de compensatiestrategie of een andere handige hoofdrekenstrategie (vb.  $456 + 267$ ;  $632-164$ ). Deze oefeningen werden gedefinieerd op basis van de twee volgende kenmerken: (1) zowel de eerste als de tweede term uit de opgave is minstens 26 eenheden groter of kleiner dan het meest nabije honderdtal (d.i., TE waarde 26 tot en met 74); (2) geen van beide termen heeft als eenheid de waarde 5, 8 of 9. Alle oefeningen bevatten een brug over zowel de tientallen als de eenheden.

De oefeningen werden geordend op basis van vijf criteria: (1) elke reeks start met de (vier) opteloefeningen; (2) de verschillende typen van oefeningen worden in een niet-voorspelbare volgorde door elkaar aangeboden; (3) de honderdtallen, tientallen en eenheden van de eerste term worden niet herhaald bij twee opeenvolgende trials; (4) de honderdtallen, tientallen en eenheden van de tweede term worden niet herhaald bij twee opeenvolgende trials; (5) het antwoord op de oefening is niet eenvoudig af te leiden uit de vorige trial.

### 3.3 Conditie

Alle leerlingen losten de drie reeksen van oefeningen op in één keuzeconditie en twee geen-keuzecondities. In de *keuzeconditie* konden de leerlingen bij elke oefening kiezen tussen hoofdrekenen en cijferen. Deze strategieën werden gerepresenteerd door twee verschillende figuren, een jongen en een meisje (zie Figuur 1). De leerlingen kregen de opdracht om de oefeningen op te lossen zoals hetzij de jongen hetzij het meisje; zij werden gevraagd om bij het beantwoorden van de oefeningen de (belangrijkste) tussenstappen en resultaten in hun oplossingsproces schriftelijk te noteren op het kladblaadje.<sup>1</sup>

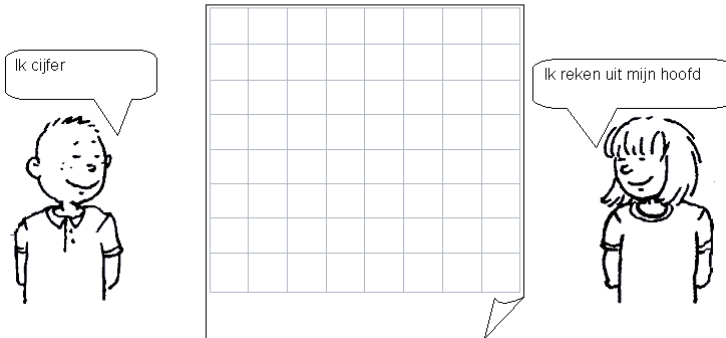
In de *geen-keuzecondities* kregen de leerlingen de opdracht alle oefeningen te beantwoorden via resp. hoofdrekenen en cijferen. Zij werden daartoe verplicht via de instructie en de vormgeving van de toetsboekjes:

---

<sup>1</sup> Hoofdrekenen werd in deze studie gedefinieerd als rekenen *met* het hoofd (en niet als rekenen *in* het hoofd) (cf. Van den Heuvel, Buys, & Treffers, 2000). Het gebruik van een hoofdrekenstrategie sluit het maken van schriftelijke notities van de (belangrijkste) stappen in het oplossingsproces dus niet uit.

de leerlingen kregen enkel het figuurtje dat de beoogde strategie representeerde aangeboden in de geen-keuzecondities.

$$534 + 299 = .$$



Figuur 1. Voorbeeld van een oefening aangeboden in de keuzeconditie

### 3.4 Procedure

Alle leerlingen losten de drie reeksen van oefeningen individueel op in een rustig lokaal tijdens de schooluren. Alle leerlingen startten met de oefeningen in de keuzeconditie. De orde van de geen-keuzecondities en de representatie van de strategieën (door jongen dan wel meisje) werden gecontrabalanceerd over de leerlingen. De proefleider registreerde in elke conditie het antwoord, de snelheid van antwoorden en het strategiegebruik per leerling en per oefening. De snelheid van antwoorden werd geregistreerd met behulp van een chronometer (tot op 0,01 seconde nauwkeurig). Indien een leerling geen of onduidelijke tussenstappen noteerde tijdens het oplossingsproces, werd hij/zij gevraagd de gevolgde strategie nadien verbaal te rapporteren aan de proefleider, die daarvan letterlijk nota maakte.

## 4. Resultaten

De resultaten worden gepresenteerd in termen van de vier parameters van het "model of strategy change". Voorafgaande analyses toonden aan dat de orde van de geen-keuzecondities (eerst hoofdrekens vs. eerst cijfers) en de representatie van de strategie (jongen vs. meisje) geen invloed hadden op de prestaties van de leerlingen in de verschillende condities,  $ps > .05$ . Deze variabelen werden daarom niet mee opgenomen in de verdere analyses.

#### 4.1 Repertoire en frequentie van strategiegebruik

De meeste leerlingen (57%) beantwoordden de set van 8 oefeningen in de keuzeconditie via zowel hoofdrekenen als cijferen. Ongeveer één vierde van de leerlingen (24%) loste alle oefeningen cijferend op. De overige leerlingen (19%) maakten enkel gebruik van hoofdrekenen.

Hoewel de meeste leerlingen de oefeningen in de keuzeconditie beantwoordden via zowel hoofdrekenen als cijferen, werd slechts 19% van de oefeningen opgelost met behulp van een hoofdrekenstrategie. De frequentie van hoofdrekenen verschilde niet tussen de verschillende typen oefeningen,  $F(1, 20) = 0.00, p > .05$ , wat er op wijst dat zowel C- als HR-oefeningen minder via hoofdrekenen dan via cijferen werden beantwoord.

Kwalitatieve analyse van de hoofdrekenstrategieën die de leerlingen toepasten in de keuzeconditie, bracht aan het licht dat de leerlingen het frequentst gebruik maakten van rijgen, splitsen of een mengvorm van deze strategieën (meer dan 80% van de oefeningen die hoofdrekenend werden beantwoord, werden opgelost via één van deze drie strategieën). Daarnaast maakten ze ook in beperkte mate gebruik van de compensatiestrategie en indirect optellen (resp. bij 15% en minder dan 5% van de oefeningen die al hoofdrekenend werden opgelost).

#### 4.2 Efficiëntie van strategie-uitvoering

Tabel 1 beschrijft de accuratesse en snelheid van strategie-uitvoering in de geen-keuzecondities per conditie en per type oefening. Zoals kan worden afgeleid uit Tabel 1, resulteerde het verplicht gebruik van de cijferalgoritmen in de geen-keuzecondities in een hogere accuratesse van antwoorden dan het verplicht gebruik van een hoofdrekenstrategie,  $F(1, 60) = 25.20, p < .01$ . Deze hogere accuratesse van cijferen werd geobserveerd voor beide typen van oefeningen,  $F(1, 60) = 0.28, p > .05$ . Met andere woorden, zowel C- als HR-oefeningen werden meer accuraat beantwoord via cijferen dan via hoofdrekenen in de geen-keuzecondities.

Het verplicht gebruik van de cijferalgoritmen resulteerde ook in een grotere snelheid van antwoorden in de geen-keuzecondities dan het verplicht gebruik van een hoofdrekenstrategie,  $F(1, 60) = 13.06, p < .01$ . Ook dit effect werd geobserveerd bij beide typen oefeningen,  $F(1, 60) = 0.12, p > .05$ ; het verplicht gebruik van de cijferalgoritmen leidde dus zowel bij C- als bij HR-oefeningen sneller tot een antwoord dan het verplicht gebruik van een hoofdrekenstrategie.

Kwalitatieve analyse van de hoofdrekenstrategieën die de leerlingen toepasten in de geen-keuzeconditie hoofdrekenen bracht aan het licht dat de leerlingen ook in deze geen-keuzeconditie overwegend gebruik maakten van weinig efficiënte splitsstrategieën en amper de beoogde compensatiestrategie hanteerden.

*Tabel 1.* Accuratesse (in proportie correct) en snelheid (in seconden) van antwoorden in de geen-keuzecondities

	Hoofdrekenen		Cijferen	
	Accuratesse	Snelheid	Accuratesse	Snelheid
HR-oefeningen	0.67	38.50	0.87	27.40
C-oefeningen	0.67	35.13	0.92	25.98
Totaal	0.67	36.81	0.89	26.69

#### 4.3 Adaptiviteit van strategiekeuzen

We bepaalden de adaptiviteit van de strategiekeuzen in de keuzeconditie door, voor elke leerling, de samenhang te berekenen tussen de frequentie van gebruik van hoofdrekenen in de keuzeconditie en het verschil in accuratesse en snelheid tussen hoofdrekenen en cijferen in de geen-keuzecondities. Indien de leerlingen adaptief gebruik maakten van hoofdrekenen en cijferen in de keuzeconditie, verwachtten we een positieve samenhang tussen enerzijds de frequentie van strategiegebruik in de keuzeconditie en anderzijds de accuratesse- en snelheidsverschillen tussen beide strategieën in de geen-keuzecondities (er op wijzend dat de leerlingen het meest gebruik maken van die strategie die ze het best beheersen). Deze analyses brachten aan het licht dat de leerlingen in hun strategiekeuzen flexibel rekening hielden met de snelheid ( $r = 0.67$ ,  $p < .01$ ) maar niet met de accuratesse ( $r = 0.12$ ,  $p > .05$ ) waarmee ze de verschillende strategieën beheersten.

#### 5. Discussie

Concluderend kan worden gezegd dat Vlaamse vierdeklassers (groep 6), na één jaar intensieve oefening van de cijferalgoritmen voor de optelling en de aftrekking, deze niet enkel zeer frequent maar ook erg efficiënt toepassen en daarbij zelfs in zekere mate rekening houden met hoe goed ze de verschillende soorten rekenwijzen beheersen. De beheersing van de hoofdrekenstrategieën was minder goed dan bij cijferen en het gebruik

ervan relatief gering, met name bij de opgaven die sterk om handig strategiegebruik vroegen. Deze enigszins verrassende – en wat het hoofdrekenen betreft eerder teleurstellende - resultaten kunnen vermoedelijk worden verklaard door de sterke focus op de cijferalgoritmen vanaf het derde leerjaar en de daarmee gepaard gaande daling in aandacht voor alternatieve, handige hoofdrekenstrategieën zoals compenseren. Zoals hoger toegelicht, besteedden de leerkrachten in het tweede leerjaar (groep 4) en tijdens de eerste maanden van het derde leerjaar (groep 5) uitvoerig aandacht aan het efficiënt gebruik van hoofdrekenstrategieën bij het optellen en aftrekken in het getallengebied tot 1000, maar stond vanaf medio derde leerjaar het toepassen van de cijferalgoritmen centraal. Deze sterke focus op de cijferalgoritmen, samen met de daarbij gehanteerde didactiek, resulteerde vermoedelijk niet alleen in een goede beheersing van deze algoritmen, maar ook in een klascultuur die het flexibel gebruik van verschillende soorten (handige) hoofdrekenstrategieën (zoals compenseren) niet bevorderde (Yackel & Cobb, 1996). Aangenomen dat dit resultaat – namelijk dat Vlaamse leerlingen vanaf tienjarige leeftijd optellen en aftreksommen met grote getallen (waarvan een aantal zich bij uitstek leent voor handig strategiegebruik) bij voorkeur cijferend aanpakken, en daarbij bovendien correct en snel te werk gaan, terwijl de frequentie en de efficiëntie van hoofdrekenen relatief laag is - in grootschaliger vervolgonderzoek bevestigd wordt, is dit dan een positief of een zorgwekkend gegeven? Het antwoord op deze vraag hangt, zoals voor zoveel vragen uit de wiskundendidactiek, af van wat men denkt over wiskunde en wiskundeonderwijs en van welke aspecten ervan men maatschappelijk en persoonlijk belangrijk en waardevol acht. Allicht zullen voorstanders van het traditionele rekenen onze resultaten beschouwen als een bijkomende aanwijzing dat we best al onze beschikbare tijd en middelen investeren in het doelgericht onderwijzen van de vier basisalgoritmen, zonder ons daarbij al te veel te bekommeren om de “overbodige” en “moeilijk aan te leren” alternatieve rekenwijzen (hoofd- en schattend rekenen); realistisch geïnspireerde vakdidactici daarentegen zullen er allicht eerder een aansporing in zien om de didactiek van het hoofd- en cijferrekenen verder bij te schaven in realistische zin, zodat leerlingen de dispositie ontwikkelen om, ook nadat ze hebben leren cijferen, (1) de handige hoofdrekenstrategieën als waardevolle werkwijzen te (blijven) beschouwen, en (2) deze strategieën inzichtelijk en handig in te zetten vooral in die kwantitatieve (probleem)situaties waarin hun computationele winst ten opzichte van het standaardalgoritme manifest is.

## Referenties

- Becker, J. P., & Selter, C. (1996). Elementary school practices. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 511-564). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- De Corte, E., Greer, B., & Verschaffel, L. (1996). Learning and teaching mathematics. In D. Berliner & R. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 491-549). New York: Macmillan.
- Feys, R. (Ed.). (2008). Mad Math en Math War (Themanummer), *Onderwijskrant*, nr. 146.
- Hickendorff, M., Heiser, W. J., Van Putten, C. M., & Verhelst, N. D. (2009). Solution strategies and achievement in Dutch complex arithmetic: Latent variable modeling of change. *Psychometrika*, 74, 331-350.
- Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool: analyse en sleutels tot verbetering*. Amsterdam: Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.
- Lemaire, P., & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General*, 124, 83-97.
- Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap (1998). *Ontwikkelingsdoelen en eindtermen. Informatiemap voor de onderwijspraktijk. Gewoon basisonderwijs*. Brussel: Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap, Departement Onderwijs, Afdeling Informatie en Documentatie.
- Selter, C. (2001). Addition and subtraction of three-digit numbers: German elementary children's success, methods, and strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 145-173.
- Siegler, R. S., & Lemaire, P. (1997). Older and younger adults' strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. *Journal of Experimental Psychology: General*, 126, 71-92.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education. The Wiskobas project*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- Van Biervliet, P. (1994). Cijferen: een kunst? Vier aanpakken voor het cijferrekenen. *Onderwijskrant*, nr. 84, 25-37.
- Van de Craats, J. (2007). Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen. *Nieuw Archief voor Wiskunde*. 5/8(2), 132-136.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., Buys, K., & Treffers, A. (Red.) (2000). *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen annex leerlijnen: hele getallen, bovenbouw basisschool*. Utrecht: Freudenthal Instituut.



- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.